７）大地を完全導体平面とした場合の電界強度の計算

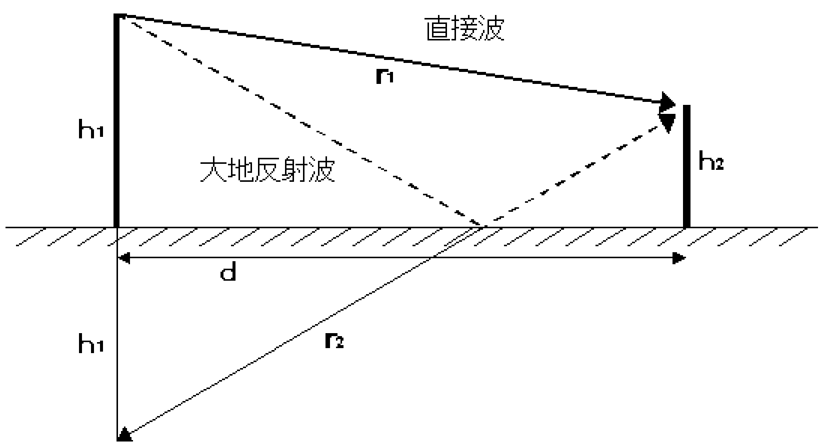
地表上に設置されたアンテナは、自由空間中のアンテナとは異なり、地表（大地）の影響を受け、アンテナの高度や相対位置によって、受信電界が変動する。

これを表す基本式

$$E = 2 * E_0 * \sin\left(\frac{2\pi h1h2}{\lambda d}\right)$$

この式は地表上のアンテナを考えるときの基本であり、またＥの最小値はゼロ　最大値は２E_0になる

考え方
受信点における電界強度は直接波と大地反射波だけと仮定し、地表波は無視する。
距離ｄ離れた２本のアンテナを考え、送信アンテナの高さをh_1、受信アンテナの高さをh_2とする。
大地を完全導体と考えて、送信アンテナの鏡像を考える。　もとのアンテナと比較して、この鏡像送信アンテナの高さは　－ｈ　電界の位相は 180 度（π）ずれている
もとのアンテナからの直接波の距離をr_1、大地反射波（すなわち鏡像送信アンテナから）の距離をr_2とする。



送信電力をＰとしたときに距離ｒ離れた地点の電界強度は次式である。

$$E = \frac{\sqrt{30P}}{r}$$

電波の速度を c として、2 つのアンテナからの電界強度を求める
直接波によるもの

$$E_1 = \frac{\sqrt{30P}}{r1} * \sin(\omega t - \frac{r1}{c})$$

大地反射波によるもの

$$E_2 = -\frac{\sqrt{30P}}{r2} * \sin(\omega t - \frac{r2}{c})$$

合成電界は E とすると

$$E = E_1 + E_2 = \frac{\sqrt{30P}}{r1} * \sin(\omega t - \frac{r1}{c}) - \frac{\sqrt{30P}}{r2} * \sin(\omega t - \frac{r2}{c})$$

十分に離れた地点とすれば $r_1 \cong r_2 \cong r$ とみなせる。

$$E_0 = \frac{\sqrt{30P}}{r1} \cong \frac{\sqrt{30P}}{r2} \cong \frac{\sqrt{30P}}{r}$$ とおけば

$$E = E_1 + E_2 = \frac{\sqrt{30P}}{r} * \sin\left(\omega t - \frac{r1}{c}\right) - \frac{\sqrt{30P}}{r} * \sin(\omega t - \frac{r2}{c})$$

$$= E_0 * \{\sin(\omega t - \frac{r1}{c}) - \sin(\omega t - \frac{r2}{c})\}$$

$\omega = 2\pi f$　　$c = f\lambda$ であるから

$\omega / c = 2\pi f / (f\lambda) = \frac{2\pi}{\lambda}$

$$E = E_0 * \{\sin(\omega t - \frac{2\pi r1}{\lambda}) - \sin(\omega t - \frac{2\pi r2}{\lambda})\}$$

｛　｝の中の式は和積変換公式

$$\sin\alpha - \sin\beta = 2 * \cos\frac{\alpha+\beta}{2} \sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

を使って計算する。

$$E = 2 * E_0 * \cos\frac{\omega t - \frac{2\pi r1}{\lambda} + \omega t - \frac{2\pi r2}{\lambda}}{2} * \sin\frac{\omega t - \frac{2\pi r1}{\lambda} - \omega t + \frac{2\pi r2}{\lambda}}{2}$$

$$= 2 * E_0 * \sin\frac{\frac{2\pi r2}{\lambda} - \frac{2\pi r1}{\lambda}}{2} * \cos\frac{2\omega t - \frac{2\pi}{\lambda}(r1+r2)}{2}$$

$$= 2 * E_0 * \sin\left\{\frac{\pi}{\lambda}(r1 - r2)\right\} * \cos\left\{\omega t - \frac{\pi}{\lambda}(r1 + r2)\right\}$$

この式は角周波数ω(＝2π f)の電波の電界の振幅（＝強さ）が

$$2 * E_0 * \sin\left\{\frac{\pi}{\lambda}(r1 - r2)\right\}$$

であることを示している。

以降、この振幅の部分のみに注目する。

図より

$$r_1 = \sqrt{d^2 + (h1 - h2)^2}$$

$$= d * \sqrt{1 + \left(\frac{h1-h2}{d}\right)^2} \cong d + d * \left(\frac{1}{2}\right) * \left(\frac{h1-h2}{d}\right)^2$$

$$r_2 = \sqrt{d^2 + (h1 + h2)^2}$$

$$= d * \sqrt{1 + \left(\frac{h1+h2}{d}\right)^2} \cong d + d * \left(\frac{1}{2}\right) * \left(\frac{h1+h2}{d}\right)^2$$

ここから $r_2 - r_1$ を計算する

$$r_2 - r_1 = d * \left(\frac{1}{2}\right) * \left(\frac{h1+h2}{d}\right)^2 - d * \left(\frac{1}{2}\right) * \left(\frac{h1-h2}{d}\right)^2$$

$$= d * \left(\frac{1}{2}\right) * \left(\frac{1}{d^2}\right) * \{ h1^2 + h2^2 + 2h1h2 - h1^2 - h2^2 + 2hih2 \}$$

$$= d * \left(\frac{1}{2}\right) * \left(\frac{1}{d^2}\right) * 4h_1h_2 = 2h_1h_2 / d$$

この $r_2 - r_1 = 2h_1h_2/d$ を電界の式に代入する

$$E = 2 * E_0 * \sin\frac{\pi(r2 - r1)}{\lambda} = 2 * E_0 * \sin\frac{2\pi h1h2}{\lambda d}$$

電界は正の値なので

$$0 \leqq E \leqq 2 * E_0$$

また d が非常に大きい、すなわちアンテナの間隔が非常に離れている場合は

$$E = 2 * E_0 * \frac{2\pi h1h2}{\lambda d} \cong \frac{4\pi h1h2}{\lambda d} * E_0$$

になるので、受信電界強度はアンテナの高さ h_1、h_2 に比例することがわかる。
また λ や d に逆比例することもわかる。

送信アンテナに半波長ダイポールアンテナを使う場合は上式の E_0 に

$$E_0 = \frac{7\sqrt{P}}{d}$$

また、相対利得 G のアンテナを使用する場合には E_0 に下記を使用する。

$$E_0 = \frac{7\sqrt{GP}}{d}$$

上記の E_0 を用いて受信電界強度を計算すると

$$E = \frac{4\pi h1h2}{\lambda d} * E_0 = \frac{4\pi h1h2}{\lambda d} * \frac{7\sqrt{GP}}{d} \cong \frac{88h1h2\sqrt{GP}}{\lambda d^2}$$